カンドル順序のカンドル作用による分析

東京科学大学理学院数学系数学コース
地引知栄 (Chihaya JIBIKI) *

概要

集合上に二項演算に対し不変な全順序を考える。これはトポロジー的には、基本群上と R-covered 葉層構造の関係になり、代数的には群環の zero-divisor 問題の解を探ることになる。近年、この研究は結び目理論のカンドル順序へと拡張されている。本講演では、カンドル順序とカンドル作用を力学系の観点から考察し、それらを結びつける力学的実現を紹介する。また、この研究手法の応用例についても述べる。

1 導入

二項演算を持つ集合 M 上の *right-order* $<$ とは，M 上の全順序であって次を満たすものである．

$$a < b \Rightarrow a \cdot m < b \cdot m \text{ for all } a, b, m \in M$$

一方，*circular order* とは，写像 $c : M^3 \to \{0, \pm 1\}$ であって次を満たすものである．

(i) $c_M(m_1, m_2, m_3) = 0$ if $m_i = m_j$ for some $i \neq j$,

(ii) $c_M(m_2, m_3, m_4) - c_M(m_1, m_3, m_4) + c_M(m_1, m_2, m_4) - c_M(m_1, m_2, m_3) = 0$ for every $m_1, m_2, m_3, m_4 \in M$,

(iii) $c_M(m_1 m, m_2 m, m_3 m) = c_M(m_1, m_2, m_3)$ for every $m, m_1, m_2, m_3 \in M$.

本研究の分野はこれらの順序構造を対象としており，特に M として群を用いることが多い．本稿ではその研究の一端を紹介する．

- 群が right-order を一つでも持つとき，その群はねじれ元を持たない．ただし，これは十分条件ではなく群に対してより強い制約が課される [1]．同様に，circular order も制約を与えるが，right-order を持つ群と circular order を持つ群はある条件下で圏同値となる [2].
- right-order や circular order がアルキメデスの原理を満たすとき，$\mathbb{R}$ や S^1 上の自然な順序を特徴付ける．
- order に対して，凸部分群を定義することができる．この凸部分群は包含関係による列をなすが，列の長さは order の特徴付けとなる．
- circular order の二つ目の条件は 2-cocycle であることと解釈できる．このため，群の二次コホモロジーの元となるが，circular order をオイラー類から導出することができる [3].

* E-mail:chihaya.j[at]gmail.com

- 3 次元多様体 M の基本群 $\pi_1(M)$ が Conradian order と呼ばれる特殊な right-order を持つこととと，M の第一 Betti 数が 0 であることは同値である [4, 5]．また，$\pi_1(M)$ が right-order を持つこととと，$M \times \mathbb{R}$ 上にある葉層構造が誘導されることは同値である [6, 7].

この他にも数多くの研究が存在しており，詳細は [1, 8, 9] にまとめられている．

order の議論は群を中心に展開されることが多いが，カンドルを用いる研究もあり，近年ではこの分野も活発化している．例えば，群環の zero-divisors 問題のカンドル版 [10] や，結び目カンドルとの関連を議論した研究 [11, 12, 13] などが挙げられる．

本稿では，二項演算を持つ集合 M 上の right-order の集合と circular order の集合をそれぞれ $RO(M), CO(M)$ とし，これらを分析する問題を考える．すなわち，order の分類問題である．

$RO(M)$ と $CO(M)$ の分析において最初に考えるべきはその濃度であるが，これは M が群の場合は [14, 15] によって，特定の群を除き非可算濃度であることが知られている．したがって，分類というよりは，位相を導入して空間の形状を把握することが適切である．一般に $RO(M) \subset CO(M)$ が成り立つことが知られているため，$CO(M)$ に位相を導入することで $RO(M)$ は相対位相が入る．$CO(M)$ は 3 値写像の集合 $\{0, \pm 1\}^{G^3}$ の部分集合である．一方で $\{0, \pm 1\}^{G^3}$ にはチコノフ位相から定まる自然な位相が存在する．これを用いて $CO(M)$ を位相空間とすることができる．また，準開基を用いても定義可能である．次の集合

$$
\begin{aligned}
\Delta(M) &= \{s = (m_1, m_2, m_3) \in M^3 \mid m_1 = m_2 \,\mathrm{or}\, m_2 = m_3 \,\mathrm{or}\, m_3 = m_1\}, \\
U_s &= \{c \in CO(M) \mid c(s) = 1\},
\end{aligned}
$$

を $s \in M^3 \setminus \Delta(M)$ で定義する．このとき，$\{U_s\}_{s \in M^3 \setminus \Delta(M)}$ は準開基である．

空間 $CO(M), RO(M)$ が定義されたのでその形状を調べるが，[16, 17] によれば、これらの空間はかなり限定的な性質を持つ．

定理　$CO(M), RO(M)$ はコンパクト完全不連結空間であり，M が可算集合のとき距離化可能である．すなわち，M が可算集合のとき，孤立点が存在しないときに限り $CO(M), RO(M)$ はカントール集合である．

2　主定理

空間 $CO(M), RO(M)$ 内の孤立点を孤立順序と呼ぶことにする．上記定理より孤立順序の存在条件を探ることが重要である．特に M が群の場合は，この 20 年ほどで非常に多様な群に対して調べ上げられてきた．そこで本研究では M がカンドルの場合に着目した．具体的には，*dynamical realization* と呼ばれる研究手法をカンドルに拡張し，主に Mann や Rivas の仕事 [18, 19] をカンドルの文脈に適用した．本説では，主定理を述べる前にカンドルの定義を与える．

定義　カンドル Q とは以下の性質を満たす二項演算 $*$ を持つ集合をいう．

Q1 $q * q = q$ for all $q \in Q$.

Q2 For each $q, r \in Q$, there exists a unique $s \in Q$ such that $q = s * r$.

Q3 $(q * r) * s = (q * s) * (r * s)$ for all $q, r, s \in Q$.

カンドルの詳細やその研究対象については，[20] に詳しくまとめられている．次が主定理である．

定理 1 [21]　Q を $\hat{q} \in Q$ で semi-latin かつ circular order を持つカンドルとする．このとき，次の連続写像が存在する．

$$R : CO(Q) \to \mathrm{Hom}_Q(Q, \mathrm{Conj}(\mathrm{Homeo}_+(S^1)))$$
$$(\text{resp.}\, R : RO(Q) \to \mathrm{Hom}_Q(Q, \mathrm{Conj}(\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})))).$$

特に R の像は忠実なカンドル作用に限定される．

定理 2 [21]　G を可算群とし，その部分集合 A を用いて $\mathcal{D}({}^G\!A)$ を Dehn カンドルとし，さらに $\hat{q} \in \mathcal{D}({}^G\!A)$ で semi-latin とする．c をその上の circular order とし，定理 1 による R の像 ρ は G 上の群作用へ拡張可能とする．

このとき，c が孤立順序であることは次と同値である：ρ に十分近い任意の ρ' に対して，連続で写像度 1 で単調な写像 $h : S^1 \to S^1$ で基点 x_0 を固定し，$\rho(q) \circ h = h \circ \rho'(q)$ が任意の $q \in \mathcal{D}({}^G\!A)$ で成り立つものが存在する．

定理 3 [21]　整数 $n \geq 2$ で $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ を自由カンドル $FQ(X)$ の生成系とする．このとき $FQ(X)$ 上の right-order $<$ は，孤立順序ならば次のいずれかを満たす．

E1 For any $\hat{q} \in FQ(X)$, there exist elements $M, m \in FQ(X)$, for any $q \in FQ(X)$ such that $\hat{q} * m < \hat{q} * q < \hat{q} * M$.

E2 For any $\hat{q} \in FQ(X)$, there exist $M, m \in FQ(X)$, for any ${}^U x_i, {}^V x_j \in FQ(X)$, such that

$$\hat{q} * M < \hat{q} * {}^U x_i < \hat{q} * {}^V x_j \text{ implies } i = j, \text{ and}$$
$$\hat{q} * {}^U x_i < \hat{q} * {}^V x_j < \hat{q} * m \text{ implies } i = j.$$

参考文献

[1] Adam Clay, and Dale Rolfsen. Ordered groups and topology. Vol. 176. American Mathematical Soc., 2016.

[2] Adam Clay, and Tyrone Ghaswala. "Free products of circularly ordered groups with amalgamated subgroup." Journal of the London Mathematical Society 100.3 (2019): 775-803.

[3] Danny Calegari. "Circular groups, planar groups, and the Euler class." Geometry & Topology Monographs 7 (2004): 431-491.

[4] Steven Boyer, Dale Rolfsen, and Bert Wiest. "Orderable 3-manifold groups." Annales de l'institut Fourier. Vol. 55. No. 1. 2005.

[5] James Howie. "On locally indicable groups." Mathematische Zeitschrift 180 (1982): 445-461.

[6] Mathieu Anel, and Adam Clay. "Orderable groups and bundles." arXiv preprint arXiv:1208.5844 (2012).

[7] Thomas F. Farrell. "Right-orderable deck transformation groups." The Rocky Mountain Journal of Mathematics 6.3 (1976): 441-447.

[8] 伊藤哲也. ”群の不変順序と位相幾何学.” 数学 67.2 (2015): 133-153.

[9] Bertrand Deroin, Andrés Navas, and Cristóbal Rivas. ”Groups, orders, and dynamics.” arXiv preprint arXiv:1408.5805 (2014).

[10] Bardako Valeriy G.v, Inder Bir S. Passi, and Mahender Singh. ”Zero-divisors and idempotents in quandle rings.” Osaka Journal of Mathematics 59.3 (2022): 611-637.

[11] Hitesh Raundal, Mahender Singh, and Manpreet Singh. Orderability of link quandles. Proc. Edinb. Math. Soc. (2), 64(3):620–649, 2021.

[12] Idrissa Ba and Mohamed Elhamdadi. Knot groups, quandle extensions and orderability, 2023.

[13] Hamid Abchir and Mohammed Sabak. On left-orderability of involutory quandles of links. arXiv preprint arXiv:2310.05735, 2023.

[14] Adam Clay, Kathryn Mann, and Cristóbal Rivas. On the number of circular orders on a group. J. Algebra, 504:336–363, 2018.

[15] Peter A. Linnell. The space of left orders of a group is either finite or uncountable. Bull. Lond. Math. Soc., 43(1):200–202, 2011.

[16] Trang Ha and Valentina Harizanov. Orders on magmas and computability theory. J. Knot Theory Ramifications, 27(7):1841001, 13, 2018.

[17] Idrissa Ba and Mohamed Elhamdadi. Circular orderability and quandles, 2022.

[18] Kathryn Mann, and Cristóbal Rivas. ”Group orderings, dynamics, and rigidity.” Annales de l'Institut Fourier. Vol. 68. No. 4. 2018.

[19] Cristóbal Rivas. ”Left-orderings on free products of groups.” Journal of Algebra 350.1 (2012): 318-329.

[20] Takefumi Nosaka. Quandles and topological pairs. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, Singapore, 2017. Symmetry, knots, and cohomology.

[21] Chihaya, Jibiki, . ”Dynamics of quandle orders.” arXiv preprint arXiv:2410.21476 (2024).